

# HINREICHENDE BEDINGUNGEN FÜR ANALYTISCHE, HARMONISCHE UND SUBHARMONISCHE FUNKTIONEN. IV

VON

L. R. J. WESTERMANN

(Communicated by Prof. J. RIDDER at the meeting of December 23, 1961)

In diesem Teil wird Satz  $C$  bewiesen. Voran geht Lemma 1, das in Hinsicht auf spätere Anwendungen etwas allgemeiner formuliert ist als hier unbedingt notwendig.

§ 16. Definition.  $S(\Pi, \sigma)$  ist ein System von Geraden  $d$  und Vektoren  $\vec{\mathfrak{B}}$ , welches einer in einem Bereich  $B$  liegenden perfekten Menge  $\Pi$  und einer positiven Zahl  $\sigma$  zugeordnet ist, mit: 1° Abstand von  $\Pi$  zum Rande  $C$  von  $B$  größer als  $\sigma$ ; und mit folgenden Eigenschaften für die  $d$  und  $\vec{\mathfrak{B}}$ : 2° durch jeden Punkt  $(x, y) \in \Pi$  gehen jedenfalls zwei nicht-zusammenfallende Geraden  $d_1(x, y), d_2(x, y)$ ; jede Gerade, deren Richtung Näherungsrichtung von Geraden  $d_1(x, y)$  ist, wobei auch  $(x, y)$  als variierend gedacht werden darf, ist eine Gerade  $\widetilde{d_1(x, y)}$ ; das gleiche gilt für die Geraden  $d_2(x, y)$ ; 3°  $\{d_j(x'', y''), \widetilde{d_j(x', y')}\}^{33} \leq \sigma (j = 1, 2), (x'', y'') \in \Pi, (x', y') \in \Pi$ ; 4°  $\{d_1(x'', y''), \widetilde{d_2(x', y')}\} \geq 800 \sigma$  bei  $(x'', y'') \in \Pi, (x', y') \in \Pi$ ; 5° bei  $(x, y) \in \Pi, (x', y') \in d_1(x, y)$  oder  $\in d_2(x, y), 0 < \delta(x', y'; x, y) \equiv \sqrt{\{(x' - x)^2 + (y' - y)^2\}} \leq \sigma$  gehören Vektoren  $\vec{\mathfrak{B}}(x, y)$  bzw.  $\vec{\mathfrak{B}}(x', y')$  mit  $\frac{|\vec{\mathfrak{B}}(x', y') - \vec{\mathfrak{B}}(x, y)|}{\delta(x', y'; x, y)} \leq \frac{1}{\sigma}$ .

Lemma 1. In einem beschränkten abgeschlossenen Bereich  $\bar{B}$  (von  $R^{(2)}$ ) mit Rand  $C$  sei, bei  $xOy$  positiv orientiertes rechtwinkliges Koordinatensystem,  $\vec{\mathfrak{B}}(x, y)$  ein Vektor mit stetigen Komponenten  $\mathfrak{B}(x, y), \mathfrak{Q}(x, y)$  parallel zur  $x$ - bzw.  $y$ -Achse. Weiter sei  $F \subseteq \bar{B}$  und perfekt, mit  $F \cdot B \neq 0, F \cdot C$  von erster Kategorie auf  $F$ , und  $E = \sum_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$  mit jedem  $E^{(n)}$  abgeschlossen in  $B$ . Durch jeden Punkt  $(x, y) \in B \cdot F - E$  soll es zwei nicht-zusammenfallende Geraden  $d_1(x, y), d_2(x, y)$  mit endlichen Grenzwerten

$$\lim_{\substack{(x', y') \rightarrow (x, y) \\ (x', y') \in d_j(x, y) \cdot \bar{B}}} \sup \frac{|\vec{\mathfrak{B}}(x', y') - \vec{\mathfrak{B}}(x, y)|}{\delta(x', y'; x, y)} \quad (j = 1, 2; \delta = \sqrt{\{(x' - x)^2 + (y' - y)^2\}})$$

geben.

<sup>33)</sup>  $\{\widetilde{l}, \widetilde{k}\}$  ist der kleinste Winkel der Geraden  $l$  und  $k$ .

Dann gibt es ein in  $B$  enthaltenes Stück<sup>18)</sup>  $II$  von  $F$ , ein positives  $\sigma < \frac{\pi}{3200}$  und ein zugehöriges System  $S(II, \sigma)$ , oder es gibt ein in  $B$  enthaltenes Stück  $II$  von  $F$ , welches zu einer der Mengen  $E^{(n)}$  gehört; dabei gehören unter den Vektoren von  $S(II, \sigma)$  die im Lemma (in den Punkten von  $II$ ) angenommenen Vektoren.

Beweis<sup>34)</sup>. Ist  $t$  eine feste Richtung, so sei für eine Gerade  $l$   $[t, \widetilde{l}]$  der kleinste Winkel zwischen  $t$  und  $l$  bei Drehung in positivem Sinne von  $t$  aus; also ist immer  $0 \leq [t, \widetilde{l}] < \pi$ .

Für natürliche Zahlen  $n_1, n_2, p$  sei  $(x, y) \in F_{n_1, n_2, p}$ , falls: a)  $(x, y) \in B \cdot F - E$  mit Abstand von  $(x, y)$  und Rand  $C$  von  $B \geq \frac{1}{100p}$ ; b)

$$\left| [t, \widetilde{d_j(x, y)}] - \frac{n_j}{800p} \right| < \frac{1}{800p} \quad (j=1, 2); \quad \text{c) } \frac{8}{p} < \{d_1(x, y), \widetilde{d_2(x, y)}\}^{33)} < \pi - \frac{8}{p}^{35)};$$

$$\text{d) } \frac{|\vec{\mathfrak{B}}(x', y') - \vec{\mathfrak{B}}(x, y)|}{\delta(x', y'; x, y)} < p \text{ bei } 0 < \delta(x', y'; x, y) \leq \frac{1}{200p} \text{ und } (x', y') \in d_j(x, y) \quad (j=1, 2).$$

Man hat:

$$F = F \cdot C + \sum_{(n_1, n_2, p)} F_{n_1, n_2, p} + \sum_{n=1}^{\infty} F \cdot E^{(n)},$$

$$\text{auch } = F \cdot C + \sum_{(n_1, n_2, p)} \bar{F}_{n_1, n_2, p} + \sum_{n=1}^{\infty} F \cdot \overline{E^{(n)}}.$$

Nach dem Satze von Baire<sup>18)</sup> gibt es ein in  $B$  liegendes Stück von  $F$ , entweder gehörend zu einem festen  $E^{(n_0)}$ , oder gehörend zu einer Menge  $B \cdot \bar{F}_{n_1^0, n_2^0, p^0}$  für bestimmte natürliche Zahlen  $n_1^0, n_2^0, p^0$ . Im ersten Fall läßt sich das zu  $E^{(n_0)}$  gehörende Stück als das Stück  $II$  im Lemma nehmen.

Im letzten Fall gibt es zu  $(x, y) \in F_{n_1^0, n_2^0, p^0}$  Geraden  $d_1(x, y), d_2(x, y)$ , welche die Bedingungen b), c) und d) befriedigen mit  $n_1 = n_1^0, n_2 = n_2^0$  und  $p = p^0$ . (Es darf ohnehin angenommen werden, daß immer  $[t, \widetilde{d_1(x, y)}] < [t, \widetilde{d_2(x, y)}]$ ).

Wir nehmen  $\sigma = \frac{1}{200p^0}$ , wodurch mit Fußn. 35 folgt  $\sigma < \frac{\pi}{3200}$ .

Es gibt somit ein abgeschlossenes Teilintervall  $\bar{u}$  von  $B$ , mit Abstand zu  $C > \sigma$ , das Punkte von  $F_{n_1^0, n_2^0, p^0}$  im Innern enthält, mit  $u \cdot F \subseteq \bar{F}_{n_1^0, n_2^0, p^0}$ ; als  $II$  betrachten wir die abgeschlossene Hülle von  $u \cdot F_{n_1^0, n_2^0, p^0}$ . Die Punkte  $(x, y) \in u \cdot F_{n_1^0, n_2^0, p^0}$  genügen den Forderungen der Definition von  $S(II, \sigma)$  bei Benutzung der im Lemma vorausgesetzten Geraden  $d_1(x, y), d_2(x, y)$ . Man überlegt sich unschwer, daß zu allen Häufungspunkten von  $u \cdot F_{n_1^0, n_2^0, p^0}$  mindestens zwei Geraden  $d_1, d_2$  gehören, für die die in der Definition von  $S(II, \sigma)$  geforderten Bedingungen erfüllt sind. Die Wahl von  $II$  und  $S(II, \sigma)$  im letzten Fall ist damit gerechtfertigt.

<sup>34)</sup> Vergleiche den Beweis eines analogen Lemmas in [17], S. 150–154.

<sup>35)</sup> Also muß  $1/p < \pi/16$  sein bei  $F_{n_1, n_2, p} \neq 0$ .

§ 17. Satz C. Der beschränkte Bereich  $B$  (in  $R^{(2)}$ ) sei von endlich vielen rektifizierbaren paarweise fremden Jordan-Kurven  $C_1, \dots, C_m$  berandet ( $C$  positiv orientierter Gesamtrand);  $xOy$  sei positiv orientiert und rechtwinklig.

Zu jedem Punkt  $(x, y) \in B - E$ , wobei  $E \subset B$  und abzählbar, gehöre ein im allgemeinen schiefwinkliges, positiv orientiertes Koordinatensystem  $X(x, y)$   $OY(x, y)$ ;  $\alpha(x, y)$  sei der Winkel von positiver  $x$ -Achse nach positiver  $X(x, y)$ -Achse, mit  $0 \leq \alpha(x, y) < 2\pi$ , und  $\beta(x, y)$  der Winkel von positiver  $X(x, y)$ -Achse nach positiver  $Y(x, y)$ -Achse, mit  $0 < \beta(x, y) < \pi$ .

$\vec{V}(x, y)$  sei ein im abgeschlossenen Bereich  $\bar{B}$  definierter Vektor, mit stetigen Komponenten  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  parallel zur  $x$ - bzw.  $y$ -Achse; der adjungierte Vektor  $\vec{\mathfrak{B}}(x, y)$ , mit den Komponenten  $\mathfrak{P}(x, y) = Q(x, y)$  und  $\mathfrak{Q}(x, y) = -P(x, y)$ , parallel zur  $x$ - bzw.  $y$ -Achse, soll in einem Punkte  $(x, y) \in B - E$  die Komponenten  $\mathfrak{P}_{X(x, y)}(x, y)$  und  $\mathfrak{Q}_{Y(x, y)}(x, y)$  parallel zur  $X(x, y)$ - bzw.  $Y(x, y)$ -Achse haben.

Vorausgesetzt wird:

1° in jedem Punkte  $(\bar{x}, \bar{y}) \in B - E$  sind die extremen Derivierten  $\bar{D}_{X(\bar{x}, \bar{y})} \mathfrak{P}_{X(\bar{x}, \bar{y})}$ ,  $\underline{D}_{X(\bar{x}, \bar{y})} \mathfrak{P}_{X(\bar{x}, \bar{y})}$ ,  $\bar{D}_{Y(\bar{x}, \bar{y})} \mathfrak{P}_{X(\bar{x}, \bar{y})}$ ,  $\underline{D}_{Y(\bar{x}, \bar{y})} \mathfrak{P}_{X(\bar{x}, \bar{y})}$  und ebenso die von  $\mathfrak{Q}_{Y(\bar{x}, \bar{y})}$  endlich <sup>36)</sup>;

2°  $f(x, y)$  ist eine über  $B$  Lebesgue-integrierbare Funktion, für die in fast allen Punkten von  $B$

$$f(x, y) \leq \bar{D}_{X(x, y)} \mathfrak{P}_{X(x, y)}(x, y) + \bar{D}_{Y(x, y)} \mathfrak{Q}_{Y(x, y)}(x, y) \equiv w(x, y)$$

ist;

3° ist  $O$  die (offene) Teilmenge von  $B$ , deren jeder Punkt  $(x, y)$  eine in  $B$  liegende Umgebung  $\Omega(x, y)$  hat, mit

$$(38) \quad \iint_{\bar{I}} f(x, y) d\sigma \leq \int_{R(I)} Pdx + Qdy, \text{ bei jedem Segment } \bar{I} \subset \Omega(x, y), R(I) \text{ positiv orientierter Rand von } I,$$

so nehmen  $\mathfrak{P}(x, y)$  und  $\mathfrak{Q}(x, y)$  in jedem  $k$ -fach zusammenhängenden, abgeschlossenen Bereich  $\bar{D} \subset O$  ( $k=1, 2, \dots$ ) ihre Maximal- und Minimalwerte in Punkten des Randes  $R(D)$  an <sup>37)</sup>.

Nun ist:

$$\iint_B f(x, y) d\sigma \leq \int_C Pdx + Qdy.$$

Satz C ist eine unmittelbare Folge des allgemeinen Theorems mit Bemerkung (Teil II, § 8) und des nachfolgenden Hilfssatzes 9.

<sup>36)</sup> Bei der Bildung dieser extremen Derivierten in  $(\bar{x}, \bar{y})$  werden selbstverständlich auch in Punkten  $(x, y) \neq (\bar{x}, \bar{y})$  einer genügend kleinen Umgebung von

$(\bar{x}, \bar{y})$  nur Komponenten von  $\vec{\mathfrak{B}}$  parallel zur  $X(\bar{x}, \bar{y})$ - und  $Y(\bar{x}, \bar{y})$ -Achse benutzt.

<sup>37)</sup> Auch  $|\mathfrak{P}(x, y) - p|$  und  $|\mathfrak{Q}(x, y) - p|$  nehmen dann, bei  $p$  fest, ihre Maximalwerte auf  $\bar{D}$  in Randpunkten an.

Hilfssatz 9. Unter den Bedingungen von Satz *C* ist für jedes in *B* liegende Segment  $\bar{I}$ , mit positiv orientiertem Rand  $R(I)$ ,

$$\iint_{\bar{I}} f(x, y) d\sigma \leq \int_{R(I)} Pdx + Qdy.$$

Zum Beweise dieses Hilfssatzes sind neben Lemma 1 (§ 16) noch drei weitere Lemmata anzuwenden.

Den Beweis führen wir indirekt. Wir setzen somit unter den Bedingungen von Satz *C* voraus, daß es ein Segment  $\bar{I}$  in *B* gibt mit

$$(39) \quad \iint_{\bar{I}} f(x, y) d\sigma > \int_{R(I)} Pdx + Qdy.$$

Dann ist die Menge *S* der Punkte von *B*, in deren jeder Umgebung Segmente liegen für die (39) gilt, nicht leer; *S* ist sogar perfekt in *B*.  $\bar{U}$  sei ein Segment, das im Innern Punkte von *S* enthält; nun sei  $F \equiv (\bar{U} \cdot S)$ . In den Punkten von  $F - E$  sind wegen Voraussetzung 1° für den zugehörigen Vektor  $\vec{\mathfrak{B}}(x, y)$  die Annahmen von Lemma 1 erfüllt, wenn man nur in jedem Punkt  $(x, y) \in F - E$  die Geraden  $d_1(x, y)$ ,  $d_2(x, y)$  bzw. mit  $X(x, y)$ ,  $Y(x, y)$  zusammenfallend annimmt. Daraus folgt in diesem Spezialfall die Existenz eines Systems  $S(\Pi, \sigma)$  gemäß der Definition in § 16 und mit  $\sigma < \frac{\pi}{3200}$ .

Es ist nun erlaubt, ohne daß dabei der Wortlaut der Bedingungen von Satz *C* geändert werden muß<sup>38)</sup>,  $xOy$  derartig gedreht zu denken, daß für jeden Punkt  $(x, y) \in \Pi$ :

$$\{0x, \widetilde{d_j}(x, y)\} < 300 \sigma, \quad \{0y, \widetilde{d_j}(x, y)\} < 300 \sigma \quad (j = 1, 2).$$

Daneben gibt es nach der Drehung ein kleinstes Segment  $\bar{I}_0$ , nun mit Seiten parallel zu den neu gewählten *x*- und *y*-Achsen, daß ein kleineres Stück  $\Pi$  von *F* und somit auch von *S* enthält, wobei also  $I_0 \cdot \Pi \neq 0$ , und außerdem Diameter von  $\bar{I}_0 < \sigma^2$ .

In den nun folgenden Betrachtungen über die Lemmata 2, 3, 4 sollen  $xOy$ ,  $\Pi$ ,  $\sigma$ ,  $\bar{I}_0$  sein wie hier angegeben.

§ 18. Lemma 2.  $\alpha_1)$   $(x', y') \in \Pi$ ,  $(x'', y'') \in \Pi$ ;  $(x_1, y_1)$  Schnittpunkt von  $d_1(x', y')$  und  $d_2(x'', y'')$ ,  $(x_2, y_2)$  Schnittpunkt von  $d_1(x'', y'')$  und  $d_2(x', y')$ ; das von den  $d_j(x', y')$  und  $d_j(x'', y'')$  ( $j = 1, 2$ ) gebildete abgeschlossene Viereck sei nicht entartet. Dann ist sein Diameter

$$< \frac{1}{\sigma} \cdot \delta(x'', y''; x', y').$$

$\alpha_2)$  Liegt es ganz in  $\bar{I}_0$  (§ 17), so ist für jedes in ihm enthaltene Punktepaar  $\{(\xi', \eta'), (\xi'', \eta'')\}$

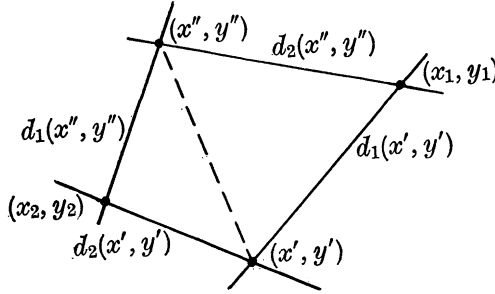
$$|\vec{\mathfrak{B}}(\xi'', \eta'') - \vec{\mathfrak{B}}(\xi', \eta')| < k_1 \cdot \delta(x'', y''; x', y'), \text{ wobei } k_1 = \frac{12}{\sigma^2}.$$

<sup>38)</sup> Für Voraussetzung 3° folgt dies mit dem allgemeinen Theorem (II, § 8).

$\beta)$  Für alle zu  $\Pi$  gehörende Punktepaare  $\{(x', y'), (x'', y'')\}$  gilt

$$|\vec{\mathfrak{B}}(x'', y'') - \vec{\mathfrak{B}}(x', y')| < k_1 \cdot \delta(x'', y''; x', y').$$

Beweis <sup>39)</sup>. ad  $\alpha_1$ ). Da jede Seite des Vierecks  $\leq \frac{\delta(x'', y''; x', y')}{\sin 800 \sigma} < \frac{\delta(x'', y''; x', y')}{400 \sigma}$  ist (die Winkel des Vierecks oder ihr Supplement sind  $\geq 800 \sigma$  wie aus Eigenschaft 4° von  $S(\Pi, \sigma)$  (§ 16) folgt), ist sein Diameter  $< \frac{1}{\sigma} \cdot \delta(x'', y''; x', y')$ .



ad  $\alpha_2$ ). Aus  $(\xi', \eta') \in \Gamma$ ,  $(\xi'', \eta'') \in \Gamma$ , mit  $\Gamma$  Rand des Vierecks, etwa  $(\xi', \eta') \in \overline{(x_1, y_1), (x'', y'')}$ ,  $(\xi'', \eta'') \in \overline{(x_2, y_2), (x', y')}$  <sup>40)</sup>, folgt

$$\begin{aligned} |\vec{\mathfrak{B}}(\xi'', \eta'') - \vec{\mathfrak{B}}(\xi', \eta')| &\leq |\vec{\mathfrak{B}}(\xi'', \eta'') - \vec{\mathfrak{B}}(x', y')| + |\vec{\mathfrak{B}}(x', y') - \vec{\mathfrak{B}}(x_1, y_1)| + \\ &\quad + |\vec{\mathfrak{B}}(x_1, y_1) - \vec{\mathfrak{B}}(x'', y'')| + |\vec{\mathfrak{B}}(x'', y'') - \vec{\mathfrak{B}}(\xi', \eta')|, \end{aligned}$$

also allgemein:

$$(40) \quad |\vec{\mathfrak{B}}(\xi'', \eta'') - \vec{\mathfrak{B}}(\xi', \eta')| < 4 \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \delta(x'', y''; x', y') = \frac{4}{\sigma^2} \cdot \delta(x'', y''; x', y'),$$

wegen Diameter von  $\bar{I}_0 < \sigma^2$  und Definition von  $S(\Pi, \sigma)$ , 5°.

Bei  $\Pi'$  = Teilmenge von  $\Pi$  im Innern des Vierecks,  $(\xi, \eta') \in \Pi'$ ,  $(\xi'', \eta'') \in \Pi'$  haben  $d_1(\xi', \eta')$  und  $d_2(\xi'', \eta'')$  Schnittpunkte  $(\xi_1, \eta_1)$  bzw.  $(\xi_2, \eta_2)$  mit  $\Gamma$ ; Anwendung von (40) auf  $(\xi_1, \eta_1)$ ,  $(\xi_2, \eta_2)$  und zweimalige Anwendung von 5° aus der Definition von  $S(\Pi, \sigma)$  liefert

$$(41) \quad |\vec{\mathfrak{B}}(\xi'', \eta'') - \vec{\mathfrak{B}}(\xi', \eta')| < \frac{6}{\sigma^2} \cdot \delta(x'', y''; x', y');$$

dies bleibt richtig mit  $(\xi', \eta') \in \Pi'$ ,  $(\xi'', \eta'') \in \Gamma$ .

(41) gilt somit bei  $(\xi', \eta') \in \Gamma + \Pi'$ ,  $(\xi'', \eta'') \in \Gamma + \Pi'$ .

<sup>39)</sup> Vergleiche die Beweise zweier Lemmata in [14], S. 64–69.

<sup>40)</sup>  $\overline{p_1, p_2}$  deutet das  $p_1$  und  $p_2$  verbindende Liniensegment an.

$(\xi', \eta') \in \Gamma + II'$ ,  $(\xi'', \eta'')$  zwar im Viereck, aber  $\notin \Gamma + II'$ , führt zu einer größten, im Viereck enthaltenen,  $(\xi'', \eta'')$  enthaltenden, offenen Menge  $O$ , deren Punkte  $(x, y)$  Umgebungen  $\Omega(x, y)$  haben mit der Eigenschaft, daß für jedes Segment  $\bar{I}$  in einer solchen Umgebung (38) gilt. Voraussetzung 3° von Satz  $C$  (und von Hilfssatz 9) liefert dann <sup>41)</sup> bei festem  $(\xi', \eta') \in \Gamma + II'$ :

$$\begin{aligned} \text{Max } |\mathfrak{P}(x, y) - \mathfrak{P}(\xi', \eta')| \text{ auf } \bar{O} &= \text{Max } |\mathfrak{P}(x, y) - \mathfrak{P}(\xi', \eta')| \text{ auf } \bar{O} - O \\ \text{und} \\ \text{Max } |\mathfrak{Q}(x, y) - \mathfrak{Q}(\xi', \eta')| \text{ auf } \bar{O} &= \text{Max } |\mathfrak{Q}(x, y) - \mathfrak{Q}(\xi', \eta')| \text{ auf } \bar{O} - O \text{ }^{37)}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\bar{O} - O \subseteq \Gamma + II'$ . Also folgt in diesem Fall:

$$\begin{aligned} |\vec{\mathfrak{B}}(\xi'', \eta'') - \vec{\mathfrak{B}}(\xi', \eta')| &\leq \text{Max } |\vec{\mathfrak{B}}(x, y) - \vec{\mathfrak{B}}(\xi', \eta')| \text{ auf } \bar{O} \leq \text{Max } |\mathfrak{P}(x, y) - \\ &\quad - \mathfrak{P}(\xi', \eta')| \text{ auf } \bar{O} + \text{Max } |\mathfrak{Q}(x, y) - \mathfrak{Q}(\xi', \eta')| \text{ auf } \bar{O} = \text{Max } |\mathfrak{P}(x, y) - \\ &\quad - \mathfrak{P}(\xi', \eta')| \text{ auf } \bar{O} - O + \text{Max } |\mathfrak{Q}(x, y) - \mathfrak{Q}(\xi', \eta')| \text{ auf } \bar{O} - O \\ &< \frac{12}{\sigma^2} \cdot \delta(x'', y''; x', y') \quad \text{oder} \quad k_1 \cdot \delta(x'', y''; x', y'). \end{aligned}$$

$(\xi', \eta') \in O$ ,  $(\xi'', \eta'') \in O$  führt in analoger Weise zu:

$$|\vec{\mathfrak{B}}(\xi'', \eta'') - \vec{\mathfrak{B}}(\xi', \eta')| < k_1 \cdot \delta(x'', y''; x', y').$$

ad  $\beta$ ).  $(x', y') \in II$ ,  $(x'', y'') \in II$ ,  $(x_1, y_1)$  Schnittpunkt von  $d_1(x', y')$  und  $d_2(x'', y'')$  <sup>42)</sup>. Nun ist

$$\delta(x'', y''; x_1, y_1) \leq \frac{\delta(x'', y''; x', y')}{\sin 800 \sigma} < \frac{\delta(x'', y''; x', y')}{400 \sigma} < \frac{\sigma^2}{400 \sigma} < \sigma.$$

Daneben gibt es eine analoge Ungleichheit für  $\delta(x', y'; x_1, y_1)$ . Zweimalige Anwendung von 5° aus der Definition von  $S(II, \sigma)$  (§ 16) führt zu:

$$\begin{aligned} |\vec{\mathfrak{B}}(x'', y'') - \vec{\mathfrak{B}}(x', y')| &\leq |\vec{\mathfrak{B}}(x'', y'') - \vec{\mathfrak{B}}(x_1, y_1)| + |\vec{\mathfrak{B}}(x_1, y_1) - \vec{\mathfrak{B}}(x', y')| \leq \\ &\leq 2 \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\delta(x'', y''; x', y')}{400 \sigma} < k_1 \cdot \delta(x'', y''; x', y'). \end{aligned}$$

<sup>41)</sup> Hier wird folgender Satz angewandt:  $F(x, y)$  sei stetig auf einer beschränkten offenen Menge  $O$ , mit (endlichen) Grenzwerten auf dem Rande  $\bar{O} - O$ . Für jedes  $k$ -fach zusammenhängende, mit Rand in  $O$  liegende Bereich  $D$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) sei  $\text{Max } F(x, y)$  auf  $\bar{D} = \text{Max } F(x, y)$  auf  $\bar{D} - D$ . Dann ist für die auf  $\bar{O}$  definierte Funktion  $u(x, y)$ , welche  $= F(x, y)$  auf  $O$ , und gleich den Grenzwerten von  $F(x, y)$  auf  $\bar{O} - O$ .

$$\text{Max } u(x, y) \text{ auf } \bar{O} = \text{Max } u(x, y) \text{ auf } \bar{O} - O.$$

Beweis. Mittels der (abgeschlossenen) Maschen eines Netzwerkes in  $R^{(2)}$  läßt sich eine Folge  $\{\bar{O}_m'\}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) von Mengen deren jede Summe von disjunkten, aus endlich vielen Maschen aufgebauten abgeschlossenen Bereichen ist, angeben, mit  $\bar{O}_1' \subset \bar{O}_2' \subset \dots \subset \bar{O}_m' \subset \dots$  und Rand  $\bar{O}_m' - O_m'$  gleichmäßig nähernd zum Rande von  $\bar{O}$ . Auf jedem  $\bar{O}_n'$  nimmt  $u$  dann ihr Maximum auf  $\bar{O}_n' - O_n'$  an. Daraus folgt, daß sie auch ihr Maximum in  $\bar{O}$  auf  $\bar{O} - O$  annimmt.

<sup>42)</sup> Die Ableitung ist dieselbe ob nun  $(x_1, y_1)$  mit einem der Punkte  $(x', y')$ ,  $(x'', y'')$  zusammenfällt, oder nicht.

Lemma 3.  $C$  sei eine (offene) Kreisscheibe in  $B$  mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $(x_0, y_0) \in \Pi$ , wobei

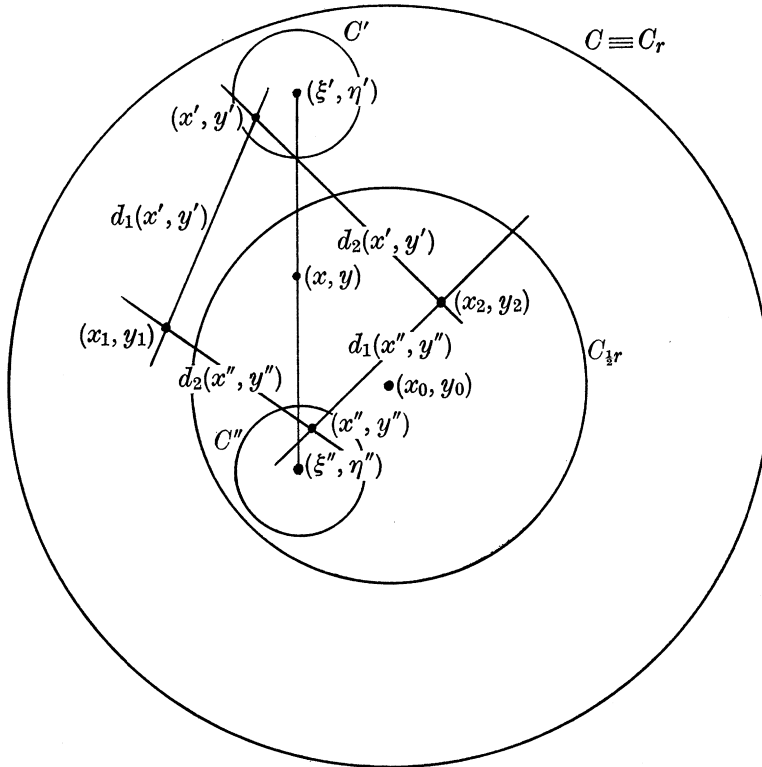
$$(42) \quad \frac{m[\Pi \cdot C]}{\pi r^2} > 1 - \sigma^4.$$

Dann ist

$$(43) \quad |\vec{\mathfrak{B}}(x, y) - \vec{\mathfrak{B}}(x_0, y_0)| < 2k_1 \cdot r$$

für alle Punkte  $(x, y)$  mit  $\delta(x, y; x_0, y_0) < \frac{1}{2}r$ .

Beweis <sup>43)</sup>. Es sei  $(x, y) \in C$  mit  $\delta(x, y; x_0, y_0) < \frac{1}{2}r$ ;  $(\xi', \eta')$  und  $(\xi'', \eta'')$  seien Punkte mit den Eigenschaften: 1°  $\overline{(\xi', \eta'), (\xi'', \eta'')}$  ist parallel zur  $y$ -Achse; 2°  $(x, y) \in \overline{(\xi', \eta'), (\xi'', \eta'')}$  und  $\delta(x, y; \xi', \eta') = \delta(x, y; \xi'', \eta'') = \frac{1}{2}r \cdot \sigma$ ;  $C'$  und  $C''$  seien (offene) Kreisscheiben mit Radius  $\sigma^2 \cdot r$  und Mittelpunkt  $(\xi', \eta')$  bzw.  $(\xi'', \eta'')$ .



$C' \subset C$ ,  $C'' \subset C$  und  $m(C') = m(C'') = \pi \sigma^4 r^2$ . Mit (42) folgt dadurch, daß es Punkte  $(x', y') \in \Pi \cdot C'$ ,  $(x'', y'') \in \Pi \cdot C''$  gibt. Die Geraden  $d_j(x', y')$ ,  $d_j(x'', y'')$  ( $j=1, 2$ ) bilden nun ein abgeschlossenes Viereck mit den Eckpunkten  $(x_1, y_1)$ ,  $(x', y')$ ,  $(x_2, y_2)$  und  $(x'', y'')$ , das nach Betrachtungen von D. MENCHOFF <sup>43)</sup>,  $(x, y)$  im Innern enthält.

<sup>43)</sup> Vergleiche den Beweis eines Lemmas in [14], S. 69–71.

Wir werden zeigen, daß dieses Viereck ganz zu  $\bar{I}_0$  (§ 17) gehört.  $(x', y') \in \Pi$ ,  $(x'', y'') \in \Pi$  liefert auch  $(x', y') \in \bar{I}_0$ ,  $(x'', y'') \in \bar{I}_0$ . Nach Lemma 2 gilt

$$\delta(x_1, y_1; x_2, y_2) < \frac{1}{\sigma} \delta(x'', y''; x', y') \leq \frac{1}{\sigma} [r\sigma + 2r\sigma^2] = r + 2r\sigma.$$

Gehörte das Viereck nun nicht ganz zu  $\bar{I}_0$ , so wäre die Seite von  $\bar{I}_0$  parallel zur  $x$ -Achse  $< r + 2r\sigma$ , somit  $m(C \cdot \bar{I}_0) < (r + 2r\sigma) \cdot 2r$ , wodurch, wegen  $\Pi \cdot C \subset \bar{I}_0 \cdot C$ ,  $m(\Pi \cdot C) < 2r^2 + 4r^2\sigma$  wäre, was mit (42) zu

$$\pi r^2(1 - \sigma^4) < 2r^2 + 4r^2\sigma$$

führen würde, im Widerspruch zu  $\sigma < \frac{\pi}{3200}$  (§ 17).

Nun läßt sich auf dem Viereck Lemma 2,  $\alpha_2$  anwenden, was liefert

$$(44) \quad |\vec{\mathfrak{B}}(x, y) - \vec{\mathfrak{B}}(x', y')| < k_1 \cdot \delta(x'', y''; x', y') < k_1 \cdot (r\sigma + 2r\sigma^2) < k_1 \cdot r.$$

Aus  $(x', y') \in \Pi$ ,  $(x_0, y_0) \in \Pi$  folgt mit Lemma 2,  $\beta$ , und  $(x', y') \in C' \subset C_r$

$$(45) \quad |\vec{\mathfrak{B}}(x', y') - \vec{\mathfrak{B}}(x_0, y_0)| < k_1 \cdot \delta(x', y'; x_0, y_0) < k_1 \cdot r.$$

(44) und (45) liefern die gesuchte Ungleichheit (43).

Lemma 4. Bei  $m(\Pi) > 0$  ist  $\vec{\mathfrak{B}}(x, y)$  fast überall total-differenzierbar auf  $\Pi$ <sup>44)</sup>, und in fast allen Punkten von  $\Pi$  ist dann

$$(46) \quad \left| \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} \right| \leq 4k_1, \quad \left| \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} \right| \leq 4k_1, \quad \left| \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x} \right| \leq 4k_1, \quad \left| \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y} \right| \leq 4k_1.$$

Beweis.  $\Pi$  hat in fast jedem ihrer Punkte die Dichte 1. Das heißt: zu einem solchen Punkte  $(x_0, y_0)$  gibt es ein positives  $r_0$  mit

$$\frac{m[\Pi \cdot C(x_0, y_0; r)]}{\pi r^2} > 1 - \sigma^4 \text{ bei } 0 < r < r_0;$$

dabei ist  $C(x_0, y_0; r)$  die (offene) Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $(x_0, y_0)$  und Radius  $r$ .

Nach Lemma 3 ist dann für alle Punkte  $(x, y)$ , mit  $\delta(x, y; x_0, y_0) < \frac{1}{2}r$ ,

$$|\vec{\mathfrak{B}}(x, y) - \vec{\mathfrak{B}}(x_0, y_0)| < 2k_1 \cdot r;$$

somit, bei  $\delta(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2}r$ ,

$$|\vec{\mathfrak{B}}(x, y) - \vec{\mathfrak{B}}(x_0, y_0)| \leq 2k_1 \cdot r = 4k_1 \cdot \delta(x, y; x_0, y_0)$$

und

$$\mathfrak{P}(x, y) - \mathfrak{P}(x_0, y_0) \leq 4k_1 \cdot \delta(x, y; x_0, y_0),$$

$$|\mathfrak{Q}(x, y) - \mathfrak{Q}(x_0, y_0)| \leq 4k_1 \cdot \delta(x, y; x_0, y_0).$$

<sup>44)</sup> D.h. sowohl  $\mathfrak{P}(x, y)$  wie  $\mathfrak{Q}(x, y)$  sind fast überall total-differenzierbar auf  $\Pi$ .



Nach einem Satze von STEPANOFF <sup>45)</sup> folgt daraus, daß  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$  in fast allen Punkten von  $\Pi$  total-differenzierbar sind, zusammen mit (46).

§ 19. Wir kehren nun zu den Betrachtungen von § 17 (Beweis des Hilfssatzes 9) zurück.

$\bar{Q}$  sei ein abgeschlossenes Quadrat, mit Seiten parallel zur  $x$ - und  $y$ -Achse und positiv orientiertem Rand  $R(\bar{Q})$ , Seitenlänge  $a$  und  $\subset I_0$ . Für eine natürliche Zahl  $n$  sei

$$(47) \quad \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{20a}{n} < \text{Abstand von } R(\bar{Q}) \text{ und } \bar{I}_0 - I_0, \text{ und } < \frac{1}{2}\sigma.$$

$\bar{Q}$  wird durch Geraden parallel zur  $x$ - und  $y$ -Achse in  $n^2$  kongruente Quadrate  $\bar{Q}_{n,j}$  ( $1 \leq j \leq n^2$ ), mit Seitenlängen  $a/n$ , geteilt.

Aus der Totalstetigkeit des Integrals von  $f(x, y)$  in  $I_0$  folgt bei positivem  $\eta$  die Existenz eines positiven  $\varepsilon < \frac{1}{4}$  und  $< \eta$  mit

$$(48) \quad \left| \iint_X f(x, y) d\sigma \right| < \eta \text{ für jede meßbare Menge } X \subset I_0 \text{ mit } m(X) < \varepsilon.$$

$(x_{n,j}, y_{n,j})$  sei die Mitte von  $\bar{Q}_{n,j}$ ,  $\gamma_{n,j}$  die abgeschlossene Kreisscheibe um  $(x_{n,j}, y_{n,j})$  mit Radius  $r_n = \frac{8a}{n}$ . Die Quadrate  $\{\bar{Q}_{n,j}\}$  zerfallen nun in drei Gruppen:

1° die  $\bar{Q}'_{n,j}$ , für die gilt:

$$(49) \quad \frac{m(\Pi \cdot \gamma_{n,j})}{\pi r_n^2} > 1 - \varepsilon^2 \sigma^4; \text{ }^{46)}$$

2° die  $\bar{Q}''_{n,j}$ , die im Innern keine Punkte von  $\Pi$  enthalten;

3° die  $\bar{Q}'''_{n,j}$ , die im Innern Punkte von  $\Pi$  enthalten, mit

$$(50) \quad \frac{m(\Pi \cdot \gamma_{n,j})}{\pi r_n^2} \leq 1 - \varepsilon^2 \sigma^4.$$

Die Menge  $E_n = \sum_{(j)} \bar{Q}'''_{n,j}$  ist meßbar mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) = 0$  <sup>47)</sup>; dadurch ist es möglich  $n$  außerdem so groß zu wählen daß:

$$(51) \quad m(E_n) < \varepsilon.$$

<sup>45)</sup> Dieser lautet: Ist  $f(x, y)$  stetig im Bereiche  $B$ , so besteht eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür daß sie fast überall in  $B$  total-differenzierbar sei, darin daß  $L_f(x, y) \equiv \limsup_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{|f(x+h, y+k) - f(x, y)|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$  fast überall in  $B$  endlich sei. Siehe [18], S. 318.

<sup>46)</sup> Daraus folgt  $\bar{Q}'_{n,j} \cdot \Pi \neq \emptyset$  und von positivem Maß.

<sup>47)</sup> Für den Beweis siehe [14], S. 74, 75.

§ 19<sup>bis</sup>.  $\Pi_{n,j}^* \equiv \Pi \cdot \bar{Q}'_{n,j} \neq 0$ . Wir betrachten eine (offene) Kreisscheibe  $C(x_0, y_0; r)$  mit Mittelpunkt  $(x_0, y_0) \in \Pi_{n,j}^*$  und Radius  $r$ , für den:

$$\frac{4a}{n} \geq r \geq \varepsilon \cdot \frac{8a}{n},$$

wodurch:

$$(52) \quad r_n \geq 2r \quad \text{und} \quad \varepsilon \cdot r_n \leq r.$$

Es ist deutlich daß  $\bar{C}(x_0, y_0; r)$  im Innern von  $\gamma_{n,j}$  liegt. (49) liefert:  $m(\gamma_{n,j}) - m(\Pi \cdot \gamma_{n,j}) < \pi r_n^2 (\varepsilon^2 \sigma^4)$ , also auch

$$m[C(x_0, y_0; r) - \Pi \cdot C(x_0, y_0; r)] < \pi r_n^2 \varepsilon^2 \sigma^4,$$

woraus mit (52) folgt:

$$(53) \quad \frac{m[\Pi \cdot C(x_0, y_0; r)]}{\pi r^2} > 1 - \sigma^4.$$

Wir wenden Lemma 3 an mit  $r = \frac{4a}{n}$ , wodurch:

$$|\vec{\mathfrak{B}}(x, y) - \vec{\mathfrak{B}}(x_0, y_0)| < 2k_1 \cdot \frac{4a}{n} \quad \text{für alle } (x, y) \text{ mit } \delta(x, y; x_0, y_0) < \frac{2a}{n}.$$

Für je zwei Punkte  $(x', y') \in \bar{Q}'_{n,j}$ ,  $(x'', y'') \in \bar{Q}'_{n,j}$  ist dadurch:

$$(54) \quad |\vec{\mathfrak{B}}(x'', y'') - \vec{\mathfrak{B}}(x', y')| < 2k_1 \cdot \frac{8a}{n}.$$

Nach Lemma 4 ist  $\vec{\mathfrak{B}}(x, y)$  in fast allen Punkten von  $\Pi_{n,j}^*$  total-differenzierbar, mit

$$(55) \quad |\mathfrak{P}_{x'}| \leq 4k_1, \quad |\mathfrak{P}_{y'}| \leq 4k_1, \quad |\mathfrak{Q}_{x'}| \leq 4k_1, \quad \text{und} \quad |\mathfrak{Q}_{y'}| \leq 4k_1.$$

Setzen wir vorläufig für das betrachtete  $\bar{Q}'_{n,j}$ :

$$\bar{Q}'_{n,j} \equiv [a_1 \leq x \leq a_2; b_1 \leq y \leq b_2],$$

und für die Menge der Punkte von  $\Pi_{n,j}^*$  mit festem  $y \equiv \Pi_y$ , so ist  $\Pi_y$  abgeschlossen (ev. leer), und bei  $\Pi_y \neq 0$  ( $a_1 < x < a_2; y = y$ ) -  $\Pi_y$  Summe von abzählbar vielen offenen Intervallen;  $(x_s' < x < x_s''; y = y)$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) seien die größten offenen Intervalle komplementär zu  $\Pi_y$  für das kleinste  $\Pi_y$  enthaltende abgeschlossene lineare Intervall  $[a' \leq x \leq a''; y = y]$ . Nach Lemma 2,  $\beta$  ist

$$(56) \quad |\mathfrak{P}(x_s'', y) - \mathfrak{P}(x_s', y)| \leq |\vec{\mathfrak{B}}(x_s'', y) - \vec{\mathfrak{B}}(x_s', y)| < k_1 \cdot \delta(x_s'', y; x_s', y).$$

Mit  $r' = 2(a' - a_1) + \varepsilon \cdot \frac{8a}{n}$  und  $r'' = 2(a_2 - a'') + \varepsilon \cdot \frac{8a}{n}$  folgt, wegen  $\varepsilon < \frac{1}{4}$

und  $a_2 - a_1 = \frac{a}{n}$ ,

$$\frac{4a}{n} \geq r' \geq \varepsilon \cdot \frac{8a}{n} \quad \text{und} \quad \frac{4a}{n} \geq r'' \geq \varepsilon \cdot \frac{8a}{n},$$

wodurch sich (53) behaupten läßt mit  $(x_0, y_0)$  ersetzt durch  $(a', y)$  oder  $(a'', y)$  und  $r$  ersetzt durch  $r'$  bzw.  $r''$ . Anwendung von Lemma 3 gibt dadurch:

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\mathfrak{P}(a_1, y) - \mathfrak{P}(a', y)| < 2k_1 \cdot \left[ 2(a' - a_1) + \varepsilon \cdot \frac{8a}{n} \right] \text{ bzw.} \\ |\mathfrak{P}(a_2, y) - \mathfrak{P}(a'', y)| < 2k_1 \cdot \left[ 2(a_2 - a'') + \varepsilon \cdot \frac{8a}{n} \right]. \end{array} \right.$$

Die auf  $[a_1, a_2]$  in  $x$  stetige Funktion  $\mathfrak{P}_y(x)$ , welche in  $(a_1, y)$  und  $(a_2, y)$  und in den Punkten von  $\Pi_y$  mit  $\mathfrak{P}(x, y)$  zusammenfällt, und sich linear ändert in den komplementären Teilintervallen von  $\overline{(a_1, y), (a_2, y)}$ , ist auf diesem linearen Segment totalstetig wie aus Lemma 2,  $\beta$  hervorgeht<sup>48)</sup>. Daraus folgt nach einer bekannten Schlußweise

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(a_2, y) - \mathfrak{P}(a_1, y) &= \int_{\Pi_y} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} dx + \sum_{(s)} [\mathfrak{P}(x_s'', y) - \mathfrak{P}(x_s', y)] + \\ &\quad + [\mathfrak{P}(a', y) - \mathfrak{P}(a_1, y)] + [\mathfrak{P}(a_2, y) - \mathfrak{P}(a'', y)], \end{aligned}$$

oder, abgekürzt,

$$(58) \quad \mathfrak{P}(a_2, y) - \mathfrak{P}(a_1, y) = \int_{\Pi_y} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} dx + \delta_1(y);$$

wegen (56) und (57) ist dabei

$$(58^{\text{bis}}) \quad |\delta_1(y)| < 16k_1 \cdot \left[ \sum_{(s)} \delta(x_s'', y; x_s', y) + (a' - a_1) + (a_2 - a'') \right] + k_1 \cdot \frac{32a}{n} \cdot \varepsilon.$$

Bei  $\Pi_y = 0$  fehlt das Integral in (58); (58<sup>bis</sup>) läßt sich dann, wegen (54), ersetzen durch

$$(58^{\text{ter}}) \quad |\delta_1(y)| < 16k_1 \cdot \frac{a}{n} + k_1 \cdot \frac{32a}{n} \cdot \varepsilon.$$

Aus (55) in fast allen Punkten von  $\Pi_{n,i}^*$  folgt die Integrierbarkeit von  $\int_{\Pi_y} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} dx$  über  $[b_1, b_2]$ , wodurch (58), (58<sup>bis</sup>) und (58<sup>ter</sup>) liefern

$$\int_{R(\bar{Q}'_{n,i})} \mathfrak{P} dy = \int_{b_1}^{b_2} dy [\mathfrak{P}(a_2, y) - \mathfrak{P}(a_1, y)] = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\Pi_y} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} dx + \int_{b_1}^{b_2} \delta_1(y) \cdot dy,$$

mit

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} \delta_1(y) dy \right| < 16k_1 \cdot m(\bar{Q}'_{n,i} - \Pi_{n,i}^*) + k_1 \cdot \frac{32a^2}{n^2} \cdot \varepsilon.$$

Mit analogen Relationen für  $-\mathfrak{Q}$  findet man nach Addition:

$$(59) \quad \int_{R(\bar{Q}'_{n,i})} P dx + Q dy = \int_{R(\bar{Q}'_{n,i})} -\mathfrak{Q} dx + \mathfrak{P} dy = \iint_{\Pi_{n,i}^*} \left[ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y} \right] d\sigma + \theta_{n,i},$$

<sup>48)</sup> Denn sie genügt dadurch einer Lipschitz-Bedingung.

wobei

$$|\theta_{n,j}| < 32k_1 \cdot m(\bar{Q}'_{n,j} - \Pi_{n,j}^*) + k_1 \cdot \frac{64a^2}{n^2} \cdot \varepsilon.$$

Mit (49) folgt:

$$m(\bar{Q}'_{n,j} - \Pi_{n,j}^*) \leq \pi r_n^2 - m(\Pi \cdot \gamma_{n,j}) < \varepsilon^2 \cdot \sigma^4 \cdot \pi r_n^2 = \varepsilon^2 \cdot \sigma^4 \cdot \pi \frac{64a^2}{n^2},$$

wodurch

$$(60) \quad |\theta_{n,j}| < k_1 \cdot \frac{64a^2}{n^2} \cdot \varepsilon [32\varepsilon \cdot \sigma^4 \cdot \pi + 1] < m(\bar{Q}'_{n,j}) \cdot \varepsilon \cdot k_2,$$

mit  $k_2$  eine von  $\varepsilon$  unabhängige positive Konstante.

Summation über alle  $\bar{Q}'_{n,j}$ , angedeutet durch  $\Sigma'$ , liefert

$$m[\Sigma'(\bar{Q}'_{n,j} - \Pi_{n,j}^*)] < \varepsilon^2 \cdot \sigma^4 \cdot \pi \cdot 64m(\Sigma' \bar{Q}'_{n,j}) \leq \varepsilon^2 \cdot \sigma^4 \cdot \pi \cdot 64m(\bar{I}_0) < \varepsilon,$$

weil  $\sigma < \frac{\pi}{3200}$ ,  $\varepsilon < \frac{1}{4}$  und der Diameter von  $\bar{I}_0 < \sigma^2$  (§ 17). Mit (48) folgt dadurch

$$(61) \quad \left| \iint_{\Sigma'(\bar{Q}'_{n,j} - \Pi_{n,j}^*)} f(x, y) d\sigma \right| < \eta.$$

Bedingung 2° von § 17, (59), (60) und (61) liefern, mit Lemma 4 und Teil I, § 2 (Satz),

$$\begin{aligned} \Sigma' \int_{R(\bar{Q}'_{n,j})} Pdx + Qdy - \iint_{\Sigma' \bar{Q}'_{n,j}} f d\sigma &\geq \Sigma' \theta_{n,j} - \iint_{\Sigma'(\bar{Q}'_{n,j} - \Pi_{n,j}^*)} f d\sigma > \\ &- m(\Sigma' \bar{Q}'_{n,j}) \cdot \varepsilon \cdot k_2 - \eta \geq -m(\bar{I}_0) \cdot \varepsilon \cdot k_2 - \eta, \end{aligned}$$

wodurch, wegen  $\varepsilon < \eta$ ,

$$(62a) \quad \Sigma' \int_{R(\bar{Q}'_{n,j})} Pdx + Qdy > -k_3 \cdot \eta,$$

wobei  $k_3$  eine von  $\eta$  unabhängige positive Konstante.

§ 19ter. Aus Segment  $\bar{I} \subset \bar{Q}''_{n,j}$ , wobei  $\bar{Q}''_{n,j}$  wie in § 19, 2°, folgt (38), somit auch (etwa mit dem allgemeinen Theorem von II, § 8)

$$\int_{R(\bar{Q}''_{n,j})} Pdx + Qdy - \iint_{\bar{Q}''_{n,j}} f d\sigma \geq 0,$$

wodurch, bei  $\Sigma''$  Summation über alle  $\bar{Q}''_{n,j}$  andeutend,

$$(62b) \quad \Sigma'' \int_{R(\bar{Q}''_{n,j})} Pdx + Qdy - \iint_{\Sigma'' \bar{Q}''_{n,j}} f d\sigma \geq 0.$$

Schließlich betrachten wir Quadrate  $\bar{Q}'''_{n,j}$  wie in § 19, 3°. Setzen wir vorläufig für ein bestimmtes  $\bar{Q}'''_{n,j}$ :

$$\bar{Q}'''_{n,j} \equiv [a_1 \leq x \leq a_2; b_1 \leq y \leq b_2].$$

Nach von D. MENCHOFF herrührenden topologischen Betrachtungen <sup>49)</sup>

<sup>49)</sup> Siehe [14], S. 82–90.

läßt sich dann die Existenz von vier Kurven  $L_i', L_i''$  ( $i=1, 2$ ) mit den nachfolgenden Eigenschaften zeigen:

1° jede Kurve ist rektifizierbar zwischen je zwei ihrer Punkte; Geraden parallel zur  $x$ - und  $y$ -Achse haben einen und nur einen Punkt mit einer solchen Kurve gemein; sind  $(x'', y'')$  und  $(x', y')$  zwei Punkte einer Kurve, so ist für die Bogenlänge dieser Kurve zwischen den zwei Punkten:

$$\text{Bogenlänge } \{(x'', y''), (x', y')\} < \frac{1}{\sigma} |x'' - x'|,$$

daneben:

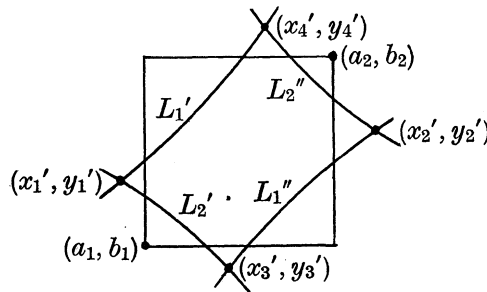
$$\overbrace{\{(x'', y''), (x', y')\}, 0x} > 300 \sigma \text{ und } \overbrace{\{(x'', y''), (x', y')\}, 0y} > 300 \sigma.$$

2° die vier zu verschiedenen Indizes gehörenden Paare dieser Kurven haben einen und nur einen gemeinsamen Punkt:

$$\left. \begin{aligned} L_1' \cdot L_2' &= \{(x_1', y_1')\} \text{ mit } x_1' < a_2 \text{ und } b_1 \leq y_1' \leq b_2 \\ L_1'' \cdot L_2'' &= \{(x_2', y_2')\} \text{ mit } x_2' > a_1 \text{ und } b_1 \leq y_2' \leq b_2 \end{aligned} \right\} \text{ mit } x_1' < x_2',$$

$$\left. \begin{aligned} L_1'' \cdot L_2' &= \{(x_3', y_3')\} \text{ mit } a_1 \leq x_3' \leq a_2 \text{ und } y_3' < b_2 \\ L_1' \cdot L_2'' &= \{(x_4', y_4')\} \text{ mit } a_1 \leq x_4' \leq a_2 \text{ und } y_4' > b_1 \end{aligned} \right\} \text{ mit } y_3' < y_4';$$

die Abstände der vier Punkte zu  $R(\bar{Q}_{n,i}''')$  ist  $< \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{2a}{n}$ .



Aus  $(\xi, \eta_1') \in L_1'$ ,  $(\xi, \eta_1'') \in L_1''$  folgt  $\eta_1'' \leq \eta_1'$ ;

aus  $(\xi_1', \eta) \in L_1'$ ,  $(\xi_1'', \eta) \in L_1''$  folgt  $\xi_1' \leq \xi_1''$ ;

aus  $(\xi, \eta_2') \in L_2'$ ,  $(\xi, \eta_2'') \in L_2''$  folgt  $\eta_2' \leq \eta_2''$ ;

aus  $(\xi_2', \eta) \in L_2'$ ,  $(\xi_2'', \eta) \in L_2''$  folgt  $\xi_2' \leq \xi_2''$ .

3° die vier Kurven schließen einen einfach zusammenhängenden Bereich  $H$  ein, wobei  $\Pi_{n,i}^{**} \equiv \Pi \cdot \bar{Q}_{n,i}''' \subseteq \bar{H}$ ; der Rand von  $H$  besteht aus den Bögen  $\{(x_1', y_1'), (x_3', y_3')\}$  von  $L_2'$ ,  $\{(x_3', y_3'), (x_2', y_2')\}$  von  $L_1''$ ,  $\{(x_2', y_2'), (x_4', y_4')\}$  von  $L_2''$ , und  $\{(x_4', y_4'), (x_1', y_1')\}$  von  $L_1'$  <sup>50</sup>).

<sup>50</sup>) Es ist denkbar, daß es keinen Bereich  $H$  gibt, z.B. bei zusammenfallenden Bogen  $\{(x_1', y_1'), (x_3', y_3')\}$  und  $\{(x_4', y_4'), (x_2', y_2')\}$ , wobei sodann  $\{(x_3', y_3'), (x_2', y_2')\}$  und  $\{(x_1', y_1'), (x_4', y_4')\}$  sich beide in einen Punkt zusammenziehen. In diesem

4° jeder Punkt von  $L_1'$  oder  $L_1''$  liegt auf einer Geraden  $d_1(x, y)$  von  $S(II, \sigma)$ , mit  $(x, y) \in \Pi_{n,j}^{**}$ , und jeder Punkt von  $L_2'$  oder  $L_2''$  auf einer Geraden  $d_2(x, y)$  von  $S(II, \sigma)$ , mit  $(x, y) \in \Pi_{n,j}^{**}$ . Die Geraden  $d_i(\xi'', \eta'')$  und  $d_i(\xi', \eta')$ , mit  $(\xi'', \eta'')$  und  $(\xi', \eta')$  Punkte von  $\Pi_{n,j}^{**}$ , welche bzw. die Punkte  $(x'', y'')$  und  $(x', y')$  von  $L_i'$  enthalten, haben einen gemeinsamen Punkt  $(\xi_0, \eta_0)$ , wobei der Winkel zwischen den linearen Segmenten  $\overline{(x'', y''), (\xi_0, \eta_0)}$  und  $\overline{(x', y'), (\xi_0, \eta_0)}$  im Dreieck  $\{(x'', y''), (\xi_0, \eta_0), (x', y')\}$  größer als  $\pi/2$  ist ( $i=1, 2$ )<sup>51</sup>). Analoges gilt für die Kurven  $L_i''$  ( $i=1, 2$ ).

Aus Diameter von  $\bar{Q}_{n,i}'' = \frac{a}{n} \sqrt{2} < \frac{1}{\sigma} \frac{a}{n}$  und Abstand von  $(x_i', y_i')$  und  $R(\bar{Q}_{n,i}') < \frac{1}{\sigma} \frac{2a}{n}$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) folgt

$$|x_k' - x_l'| < \frac{1}{\sigma} \frac{5a}{n}, \text{ für die Paare } (k, l) : (1, 3), (1, 4), (3, 2), (4, 2),$$

während nach 1° für dieselben Paare  $(k, l)$  gilt

$$\text{Kurvenlänge von } \{(x_k', y_k'), (x_l', y_l')\} < \frac{1}{\sigma} |x_k' - x_l'|,$$

wodurch für diese Paare auch folgt

$$\text{Kurvenlänge von } \{(x_k', y_k'), (x_l', y_l')\} < \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{5a}{n}.$$

Der Diameter von  $\bar{H}$  ist dadurch  $< \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{20a}{n}$ .

Im folgenden soll gezeigt werden, daß für je zwei Punkte  $(x'', y'')$  und  $(x', y')$  von  $\bar{H}$  gilt:

$$|\vec{\mathfrak{B}}(x'', y'') - \vec{\mathfrak{B}}(x', y')| < k_4 \cdot \frac{a}{n}, \text{ mit } k_4 = \frac{800}{\sigma^3}.$$

Nehmen wir erstens  $(x'', y''), (x', y')$  auf einem der Randbögen von  $\bar{H}$ , etwa auf  $\{(x_4', y_4'), (x_1', y_1')\}$  an. Die Punkte  $(\xi'', \eta''), (\xi', \eta'), (\xi_0, \eta_0)$  seien für  $L_1'$  wie unter 4° angegeben. Da  $(x'', y''), (x', y'), (\xi'', \eta'')$  und  $(\xi', \eta')$  zu  $\bar{H}$  gehören, folgt:

$$(63) \quad \delta(x'', y''; \xi'', \eta'') < \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{20a}{n} \text{ und } \delta(x', y'; \xi', \eta') < \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{20a}{n};$$

Fall ist beweisbar daß die zusammenfallende Bogen Liniensegmente sind, welche alle Punkte von  $\Pi_{n,j}^{**}$  enthalten. Es ist nun leicht zu zeigen, daß die Relation (38) für  $\bar{Q}_{n,j}'''$  gilt, wodurch wir derartige Quadrate in die zweite Gruppe der  $\bar{Q}_{n,j}''$  (für die (62b) gilt) unterbringen können.

<sup>51</sup>) Der Fall, in welchem  $d_i(\xi'', \eta'')$  und  $d_i(\xi', \eta')$  zusammenfallen, ist bei dieser Formulierung eingeschlossen;  $\overline{(x'', y''), (x', y')}$  liegt dann auf einer Geraden  $d_j(\xi, \eta)$  mit  $(\xi, \eta) \in \Pi_{n,j}^{**}$ , für  $(\xi_0, \eta_0)$  wähle man dann einen innern Punkt von  $\overline{(x'', y''), (x', y')}$ .

da nach 4°  $\delta(x'', y''; \xi_0, \eta_0) < \delta(x'', y''; x', y')$  ist, erhalten wir

$$(64) \quad \delta(\xi'', \eta''; \xi_0, \eta_0) \leq \delta(\xi'', \eta''; x'', y'') + \delta(x'', y''; \xi_0, \eta_0) < \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{40a}{n},$$

und analog

$$(65) \quad \delta(\xi_0, \eta_0; \xi', \eta') < \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{40a}{n}.$$

Aus (63), (64), (65) und (47) folgt

$$\delta(x'', y''; \xi'', \eta'') < \sigma, \delta(\xi'', \eta''; \xi_0, \eta_0) < \sigma, \delta(\xi_0, \eta_0; \xi', \eta') < \sigma, \delta(\xi', \eta'; x', y') < \sigma,$$

wodurch sich 5° aus der Definition von  $S(\Pi, \sigma)$  anwenden läßt, was liefert:

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} & |\vec{\mathfrak{B}}(x'', y'') - \vec{\mathfrak{B}}(x', y')| \leq |\vec{\mathfrak{B}}(x'', y'') - \vec{\mathfrak{B}}(\xi'', \eta'')| + |\vec{\mathfrak{B}}(\xi'', \eta'') - \vec{\mathfrak{B}}(\xi_0, \eta_0)| + \\ & + |\vec{\mathfrak{B}}(\xi_0, \eta_0) - \vec{\mathfrak{B}}(\xi', \eta')| + |\vec{\mathfrak{B}}(\xi', \eta') - \vec{\mathfrak{B}}(x', y')| \leq \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{120a}{n}. \end{aligned} \right.$$

Anwendung von (66) zeigt bei  $(x'', y'')$  und  $(x', y')$  auf voneinander verschiedenen Randbögen von  $\bar{H}$ :

$$(67) \quad |\vec{\mathfrak{B}}(x'', y'') - \vec{\mathfrak{B}}(x', y')| \leq \frac{1}{\sigma^3} \cdot \frac{360a}{n}.$$

Aus  $(x'', y'') \in \Pi \cdot \bar{H}$ ,  $(x', y') \in \bar{H} - H$  und  $(\bar{x}, \bar{y})$  Schnittpunkt einer nach der Definition von  $S(\Pi, \sigma)$  zu  $(x'', y'')$  gehörenden Geraden  $d_1(x'', y'')$  mit dem Rande  $\bar{H} - H$ , folgt, mit (67), 5° aus der Definition von  $S(\Pi, \sigma)$  und  $\delta(\bar{x}, \bar{y}; x'', y'') < \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{20a}{n} < \sigma$ ,

$$\begin{aligned} |\vec{\mathfrak{B}}(x'', y'') - \vec{\mathfrak{B}}(x', y')| &\leq |\vec{\mathfrak{B}}(x'', y'') - \vec{\mathfrak{B}}(\bar{x}, \bar{y})| + |\vec{\mathfrak{B}}(\bar{x}, \bar{y}) - \vec{\mathfrak{B}}(x', y')| < \\ &< \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{20a}{n} + \frac{1}{\sigma^3} \cdot \frac{360a}{n} = \frac{1}{\sigma^3} \cdot \frac{380a}{n}. \end{aligned}$$

Es ist nun leicht einzusehen, daß für je zwei willkürliche Punkte  $(x'', y''), (x', y') \in \Pi \cdot \bar{H} + (\bar{H} - H)$  gilt:

$$(68) \quad |\vec{\mathfrak{B}}(x'', y'') - \vec{\mathfrak{B}}(x', y')| < \frac{1}{\sigma^3} \cdot \frac{400a}{n}.$$

$\Pi_{n,i}^{**} \equiv \Pi \cdot \bar{Q}_{n,i}'' \subset \bar{H}$  (nach 3°);  $\bar{H}$  enthält somit Punkte von  $\bar{Q}_{n,i}''$ , also auch von  $\bar{Q}$ . Da der Diameter von  $\bar{H} < \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{20a}{n}$  ist, und  $n$  so groß gewählt wurde daß der Abstand von  $\bar{Q}$  und  $\bar{I}_0 - I_0 > \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{20a}{n}$  ist (§ 19), gilt  $\bar{H} \subset I_0$ .

Nach dem Beweisverfahren welches zu Lemma 2,  $\alpha_2$  führte, folgt nun für je zwei Punkte  $(x'', y''), (x', y') \in \bar{H}$ :

$$(69) \quad |\vec{\mathfrak{B}}(x'', y'') - \vec{\mathfrak{B}}(x', y')| < k_4 \cdot \frac{a}{n} \text{ bei } k_4 = \frac{800}{\sigma^3}.$$

Da jeder der vier Bögen, welche den Rand von  $H$  bilden, mit jeder der Seiten von  $\bar{Q}_{n,j}'''$  höchstens einen Punkt gemeinsam haben kann, ist  $H_0 \equiv H \cdot \bar{Q}_{n,j}'''$  ein einfach zusammenhängender Bereich <sup>50)</sup>, dessen Rand besteht aus vier Bögen  $\lambda_{k,l}$ , liegend auf Bögen  $\{(x_k', y_k'), (x_l', y_l')\}$ , mit  $(k, l) = (1, 3), (1, 4), (3, 2)$  oder  $(4, 2)$ , und vier linearen Segmenten  $r_l (l=1, \dots, 4)$  auf den Seiten von  $\bar{Q}_{n,j}'''$ . Dabei ist es möglich daß einzelne  $\lambda_{k,l}, r_l$  leer sind, aber jedenfalls ist  $\Pi_{n,j}^{**} \subseteq \bar{H}_0$ , mit

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Bogenlänge } \lambda_{k,l} \leq \text{Bogenlänge } \{(x_k', y_k'), (x_l', y_l')\} < \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{5a}{n}, \text{ und} \\ \text{Länge } r_l \leq \frac{a}{n}. \end{array} \right.$$

Die offene Menge  $G \equiv Q_{n,j}''' - \bar{H}_0$  ist Summe von höchstens vier einfach zusammenhängenden Bereichen  $G_v$ , ausgenommen bei  $\bar{Q}_{n,j}''' = \bar{H}_0$  (dann ist  $G$  leer), oder bei  $\bar{H}_0 \subset Q_{n,j}'''$ , (dann ist  $G$  ein zweifach zusammenhängender Bereich).

Wegen  $\Pi_{n,j}^{**} \subseteq \bar{H}_0$  ist für jedes in einem  $G_v$  enthaltenen, abgeschlossenen Intervall  $\bar{I}$  (38) erfüllt, was mit dem allgemeinen Theorem (Teil II, § 8) und bei  $R(G_v)$  positiv orientierter Rand von  $G_v$  gibt

$$(71) \quad \iint_{G_v} f(x, y) d\sigma \leq \int_{R(G_v)} P dx + Q dy.$$

$Q(x, y)$  und  $-P(x, y)$  sind Komponenten des Vektors  $\vec{\mathfrak{B}}(x, y)$  parallel zur  $x$ - und  $y$ -Achse; ist  $(x_0, y_0) \in H$ ,  $(x, y) \in \bar{H}_0$ , so folgt mit (69)

$$(72) \quad |P(x, y) - P(x_0, y_0)| < k_4 \cdot \frac{a}{n} \text{ und } |Q(x, y) - Q(x_0, y_0)| < k_4 \cdot \frac{a}{n}.$$

Bei richtig gewählten Integrationsrichtungen längs den  $\lambda_{k,l}$  und  $r_l$  erhält man, unter Anwendung von (70) bis (72),

$$\begin{aligned} \int_{R(\bar{Q}_{n,j}''')} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \iint_{\bar{Q}_{n,j}'''} f(x, y) d\sigma &= \int_{R(\bar{Q}_{n,j}''')} [P(x, y) - P(x_0, y_0)] dx + \\ &+ [Q(x, y) - Q(x_0, y_0)] dy - \iint_{\bar{Q}_{n,j}'''} f(x, y) d\sigma = \\ &= \sum_{(k,l)} \int_{\lambda_{k,l}} [P(x, y) - P(x_0, y_0)] dx + [Q(x, y) - Q(x_0, y_0)] dy + \\ &+ \sum_{(v)} \int_{r_l} [P(x, y) - P(x_0, y_0)] dx + [Q(x, y) - \\ &- Q(x_0, y_0)] dy + \sum_{(v)} \int_{R(G_v)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \iint_{\bar{Q}_{n,j}'''} f(x, y) d\sigma \geq \\ &\geq -8k_4 \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{5a}{n} - 8k_4 \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n} - \iint_{H_0} f d\sigma = -8k_4 \left( \frac{5}{\sigma^2} + 1 \right) \cdot \frac{a^2}{n^2} - \iint_{H_0} f d\sigma. \end{aligned}$$

Summation ( $\sum'''$ ) über alle  $\bar{Q}_{n,j}'''$  liefert

$$\sum''' \int_{R(\bar{Q}_{n,j}''')} P dx + Q dy - \iint_{\sum''' \bar{Q}_{n,j}'''} f d\sigma \geq -8k_4 \left( \frac{5}{\sigma^2} + 1 \right) \cdot m[\sum''' \bar{Q}_{n,j}'''] - \iint_{\sum''' H_0} f d\sigma.$$



Nach (51) wurde  $n$  so groß gewählt daß  $m(E_n) < \varepsilon$  ist; mit  $\sum''' H_0 \subset \sum''' \bar{Q}_{n,i}''' \equiv E_n$ , (48) und  $\varepsilon < \eta$  folgt dadurch:

$$(62c) \quad \sum''' \int_{R(\bar{Q}_{n,i}''')} Pdx + Qdy - \iint_{\sum''' \bar{Q}_{n,i}'''} f d\sigma \geq -8k_4 \left( \frac{5}{\sigma^2} + 1 \right) \cdot \varepsilon - \eta > -k_5 \cdot \eta,$$

wobei  $k_5$  eine von  $\eta$  unabhängige positive Konstante.

§ 20. Durch Summation von (62a), (62b) und (62c) folgt:

$$\int_{R(\bar{Q})} Pdx + Qdy - \iint_{\bar{Q}} f d\sigma > (-k_3 - k_5) \cdot \eta,$$

wobei  $-k_3 - k_5$  unabhängig von  $\eta$ . Für jedes abgeschlossene Quadrat  $\bar{Q} \subset I_0$  ist somit

$$\int_{R(\bar{Q})} Pdx + Qdy - \iint_{\bar{Q}} f d\sigma \geq 0.$$

Dies widerspricht jedoch der Annahme  $S \cdot I_0 \neq 0$  (§ 17). Damit ist der Hilfssatz 9 bewiesen.

#### BIBLIOGRAPHIE (Fortsetzung)

17. MENCHOFF, D., Sur les fonctions monogènes. Bull. Soc. math. France **69**, S. 141–182 (1931).
18. STEPANOFF, W., Über totale Differenzierbarkeit. Math. Ann. **90**, S. 318–320 (1923).